

命题逻辑系统 SMTL 中公式的积分真度理论

李 骏, 姚锦涛

(兰州理工大学理学院, 甘肃兰州 730050)

摘 要: 首先给出了强左连续 t -模和 SMTL 命题逻辑系统的定义, 证明了左连续的 t -模为强左连续 t -模当且仅当与之伴随的正则蕴涵算子为强正则蕴涵算子; 其次, 在基于强正则蕴涵算子的模糊命题逻辑系统中定义了公式的积分真度, 给出了积分真度推理规则; 最后, 基于公式的积分真度在 SMTL 命题逻辑系统的全体公式集上引入了一种伪距离, 提出了三种近似推理机制, 从而使得在 SMTL 命题逻辑系统的统一框架下展开近似推理成为可能.

关键词: 积分真度; 强左连续 t -模; 强正则蕴涵算子; SMTL 命题逻辑系统; 伪度量

中图分类号: O142 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2013)05-0878-06

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2013.05.008

Theory of Integral Truth Degrees of Formula in SMTL Propositional Logic

LI Jun, YAO Jin-tao

(School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou, Gansu 730050, China)

Abstract: The concept of strong left-continuous t -norm and SMTL propositional logic system is introduced. It is proved that the left continuous t -norm is the strong left-continuous t -norm if and only if its adjoining implication operator is strong regular implication operator. Based on the fuzzy propositional logic of strong regular implication operator the integral truth degree of formula is defined and inference rules w.r.t the integral truth degree of formula is proved. Moreover, a pseudo-metric is defined therefrom on the set of formulas in SMTL system, and three models for approximate reasoning are given, hence a possible framework suitable for developing approximate reasoning theory in SMTL propositional logic is established.

Key words: integral truth degree; strong left-continuous t -norm; strong regular implication operators; SMTL propositional logic; pseudo metric

1 引言

数理逻辑的特点在于形式化和符号化而不是数值计算, 为了反映程度化的思想, 早在 20 世纪 50 年代初, 文献[1]中用“指派真值”的方式来反映逻辑公式真实程度的做法已经反映了数理逻辑概念的程度化思想. 这种思想在 Pavalka 的系列文献[2]中得到了全面地发展, 其中几乎所有的概念都已数值化了. 后来许多学者从不同的角度提出了逻辑公式的程度化思想, 文献[3]就格值逻辑的情形基于多种不同的被知值概念展开了知识状态逻辑的研究.

2002 年, 王国俊教授在经典二值命题逻辑中引入了命题的真度概念^[4], 提出了计量逻辑学理论, 建立了一套近似推理模式之后, 国内外同行展开了广泛的研究, 相似的结果被推广到各种 n 值命题逻辑系统中并

得到了许多重要结果(参看文献[5~13]). 由于计量逻辑学是基于均匀概率的思想来建立命题的真度概念, 因此它虽有整体性的优点却缺乏随机性, 为此, 文[14]利用赋值空间上的 Borel 概率测度在二值命题逻辑系统中引入了集随机性和整体性于一体的公式的概率真度概念, 并通过把公式诱导的函数进行积分的方法给出了公式真度的积分表达式.

另外, 关于连续值逻辑, 文[15]在常见的四种模糊命题逻辑系统中, 通过将公式诱导的函数进行积分的方法提出了公式的积分真度概念, 建立了相应的近似推理机制. 文献[16]则在一类命题逻辑系统(包括, 但不限于常见的有限值逻辑和模糊逻辑系统)中借助文[14]的思想给出了利用积分定义公式真度的统一方法, 但需要假定公式诱导的函数是可测的, 并且在引入相似度和伪距离时对蕴涵算子也有条件限制. 针对这一情况, 本文首

先提出了强左连续 t -模和强正则蕴涵算子的概念,并将文献[15]的思想和方法应用于基于强左连续三角模的命题逻辑系统(简记为 SMTL)中建立了公式积分真度的统一理论,同时提出一种近似推理机制.值得注意的是:首先,文献[15]的结果可纳入到本文更为广泛的统一框架下;其次,在 SMTL 系统中,文献[16]关于建立积分真度和相似度时提出的假设条件全部成立,这就使得在本文的统一框架下展开近似推理成为可能,也使得文献[16]的思想和方法在本文所建立的 SMTL 系统的统一框架下得以具体实现.

2 预备知识

定义 1^[8] 设 $\otimes: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ 是二元函数, $a, b, c \in [0,1]$, I 为指标集合,如果

- (1) $a \otimes b = b \otimes a$.
- (2) $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$.
- (3) $1 \otimes a = a$.
- (4) 若 $a \leq b$, 则 $a \otimes c \leq b \otimes c$.

则称 $\otimes$ 为 $[0,1]$ 上的三角模,简称为 t -模.如果 $\otimes$ 还满足:

- (5) $\forall a, b \in [0,1], a \otimes (\bigvee_{i \in I} b_i) = \bigvee_{i \in I} (a \otimes b_i)$,

则称 $\otimes$ 是左连续的三角模.

定义 2^[8] 设 $R: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ 是二元函数, $\otimes$ 是 $[0,1]$ 上的三角模,若

$$a \otimes b \leq c \text{ 当且仅当 } a \leq R(b, c),$$

则称 R 是与 $\otimes$ 相伴随的蕴涵算子,并称 $(\otimes, R)$ 为伴随对,特别若 $\otimes$ 为左连续的三角模,则称 R 为正则蕴涵算子,记 $R(a, b) = a \rightarrow b$.

注 1 容易验证,按如下方式定义的最常见的几种三角模:

$$\begin{aligned} a \otimes_G b &= a \wedge b, & a \otimes_M b &= a \times b \\ a \otimes_L b &= (a + b - 1) \vee 0, \\ a \otimes_0 b &= \begin{cases} a \wedge b, & a + b > 1 \\ 0, & a + b \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

都是左连续三角模,分别称为 Gödel 三角模、乘积三角模、Łukasiewicz 三角模和 R_0 三角模,与它们各自相伴随的蕴涵算子都是正则蕴涵算子,分别按如下方式定义:

$$\begin{aligned} a \rightarrow_G b &= \begin{cases} 1, & a \leq b \\ b, & a > b \end{cases}, & a \rightarrow_L b &= (1 - a + b) \wedge 1, \\ a \rightarrow_M b &= \begin{cases} 1, & a \leq b \\ \frac{b}{a}, & a > b \end{cases}, & a \rightarrow_0 b &= \begin{cases} 1, & a \leq b \\ (1 - a) \vee b, & a > b \end{cases} \end{aligned}$$

依次称为 Gödel 蕴涵算子、Łukasiewicz 蕴涵算子、Goguen 蕴涵算子和 R_0 蕴涵算子.

引理 1^[8,18] 设 $\rightarrow$ 是正则蕴涵算子,则有

- (1) $b \rightarrow c = 1$ 当且仅当 $b \leq c$.

- (2) $a \leq b \rightarrow c$ 当且仅当 $b \leq a \rightarrow c$.

- (3) $a \rightarrow (b \rightarrow c) = b \rightarrow (a \rightarrow c)$.

- (4) $1 \rightarrow c = c$.

- (5) $b \rightarrow c$ 关于 c 单调递增,关于 b 单调递减.

- (6) $(b \rightarrow c) \leq (a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)$.

- (7) $a \rightarrow b \leq a \otimes c \rightarrow b \otimes c$.

定义 3 (i) 设 $\otimes: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ 是左连续的三角模,如果 $\otimes$ 还满足 $a \otimes_L b \leq a \otimes b$, 则称 $\otimes$ 是强左连续三角模,这里 $\otimes_L$ 是 Łukasiewicz 三角模.

(ii) 设 $R: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ 是正则蕴涵算子,如果 R 还满足 $R(a, b) \leq R_L(a, b)$, 则称 R 是强正则蕴涵算子,这里 $R_L(a, b)$ 是 Łukasiewicz 蕴涵算子.

注 2 容易验证: Gödel 三角模、乘积三角模、Łukasiewicz 三角模和 R_0 三角模都是强左连续的三角模,与它们各自相伴随的蕴涵算子都是强正则蕴涵算子;并且 Gödel 三角模是最大的强左连续三角模,而 Łukasiewicz 三角模则是最小的强左连续三角模.

在左连续的三角模中,除了上面常见的四种左连续三角模为强左连续三角模外,是否还有其它的左连续三角模也为强左连续三角模呢? 答案是肯定的,例如:

例 1 设 $\otimes_1: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ 定义如下:

$$a \otimes_1 b = \begin{cases} a \wedge b, & a + b > \frac{1}{2} \\ 0, & a + b \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

则 $\otimes_1: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ 是强左连续三角模.

但值得注意的是:并不是所有的左连续三角模都是强左连续三角模.

例 2 设 $\otimes_2: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ 定义如下:

$$a \otimes_2 b = \begin{cases} 0, & a \leq \sqrt{1 - b^2} \\ (a^2 + b^2 - 1)^{\frac{1}{2}}, & a > \sqrt{1 - b^2} \end{cases}$$

则 $\otimes_2: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ 是左连续的三角模,但不是强左连续三角模.

注 3 文献[17]中曾提出:若正则蕴涵算子 $R: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ 满足:

$$R(a, c) + 1 \geq R(a, b) + R(b, c),$$

则称 $R: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ 为强正则蕴涵算子,事实上,本文给出的强正则蕴涵算子的定义与文献[17]中强正则蕴涵算子的定义是等价的,这可由下面的命题得到保证:

命题 1 设 $R: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ 是正则蕴涵算子,则 $\forall a, b, c \in [0,1]$, 都有

$$\begin{aligned} R(a, c) + 1 &\geq R(a, b) + R(b, c) \text{ 当且仅当} \\ R(a, b) &\leq R_L(a, b). \end{aligned}$$

证明 设 $R(a, c) + 1 \geq R(a, b) + R(b, c)$ 成立, 令 $a = 1$, 由引理 1 可得 $1 - b + c \geq R(b, c)$. 又因为 $1 \geq R(b, c)$, 所以 $(1 - b + c) \wedge 1 \geq R(b, c)$, 即 $R_L(b, c) \geq R(b, c)$.

反过来, 设 $R(a, b) \leq R_L(a, b)$ 成立, 则由引理 1 可得

$$\begin{aligned} R(b, c) &\leq R(a, b) \rightarrow R(a, c) \\ &\leq R(a, b) \rightarrow_L R(a, c) = (1 - R(a, b) + R(a, c)) \\ &\quad \wedge 1 \\ &\leq (1 - R(a, b) + R(a, c)) \leq R(a, b) \rightarrow_L R(a, c) \\ &= (1 - R(a, b) + R(a, c)) \wedge 1 \\ &\leq (1 - R(a, b) + R(a, c)). \end{aligned}$$

从而 $R(a, b) + R(b, c) \leq R(a, c) + 1$ 成立.

命题 2 设 $\otimes$ 是左连续的三角模, R 是与之伴随的正则蕴涵算子, 则 $\otimes$ 是强左连续三角模当且仅当 R 是强正则蕴涵算子.

证明 设 $\otimes$ 是强左连续三角模, $\forall a, b, c \in [0, 1]$, 由引理 1 知 $a \rightarrow b \leq (b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow c)$, 从而 $(a \rightarrow b) \otimes (b \rightarrow c) \leq a \rightarrow c$ 成立, 令 $a = 1$, 得 $b \otimes (b \rightarrow c) \leq c$. 又由 $\otimes$ 是强左连续三角模得:

$$\begin{aligned} b + (b \rightarrow c) - 1 &\leq (b + (b \rightarrow c) - 1) \vee 0 \\ &= b \otimes_L (b \rightarrow c) \leq b \otimes (b \rightarrow c) \leq c \end{aligned}$$

从而有 $b \rightarrow c \leq 1 - b + c$ 成立, 进而 $b \rightarrow c \leq (1 - b + c) \wedge 1$ 成立, 即 $R(b, c) \leq R_L(b, c)$. 故 R 是强正则蕴涵算子.

反之, 设 R 是强正则蕴涵算子, 则 $\forall b, c \in [0, 1]$, 由引理 1 知 $a \rightarrow b \leq a \otimes c \rightarrow b \otimes c$, 再由 R 是强正则蕴涵算子得

$$\begin{aligned} a \rightarrow b &\leq a \otimes c \rightarrow b \otimes c \leq a \otimes c \rightarrow_L b \otimes c \\ &\leq 1 - (a \otimes c) + (b \otimes c), \end{aligned}$$

在上式中令 $a = 1$, 可得 $b + c - 1 \leq b \otimes c$. 又因为 $0 \leq b \otimes c$, 所以 $(b + c - 1) \vee 0 \leq b \otimes c$, 即 $b \otimes_L c \leq b \otimes c$, 从而 $\otimes$ 是强左连续三角模.

设 $S = \{p_1, p_2, \dots\}$ 是可数集, $\neg$ 是一元运算, $\vee$ 与 $\rightarrow$ 是二元运算, 由 S 生成的 $(\neg, \vee, \rightarrow)$ 型自由代数记作 $F(S)$. $F(S)$ 中的元素叫做公式或者命题, S 中的元素叫做原子公式或者原子命题. 由 $F(S)$ 中的公式构成的集合, 称为理论.

定义 4 设 $I = [0, 1]$, $\neg$ 是 I 上的一元运算, $\vee$ 与 $\rightarrow$ 是 I 上的二元运算, 在 I 中规定: $\forall x, y \in I$,

$$\begin{aligned} \neg x &= x \rightarrow 0, x \vee y = \max\{x, y\}, \\ x \rightarrow y &= R(x, y). \end{aligned}$$

这里 R 是正则蕴涵算子, 称 I 为 R 单位区间, 称 $(F(S), (\neg, \vee, \rightarrow), I)$ 为 MTL 逻辑系统, 记作 MTL. 进一步, 若 $\rightarrow$ 是 $[0, 1]$ 上的强正则蕴涵算子时, 我们称 $(F(S), (\neg, \vee, \rightarrow), I)$ 为强 MTL 逻辑系统, 记作 SMTL.

定义 5 设 $A \in F(S)$, 从 $F(S)$ 到 R 单位区间的 $(\neg, \vee, \rightarrow)$ 型同态映射称为 $F(S)$ 的 R 赋值, 全体 R 赋值之集记作 Ω_R . 设 $\alpha \in [0, 1]$, 若对任意 $v \in \Omega_R$, 总有 $v(A) \geq \alpha$, 称公式 A 为 α -重言式. 1 -重言式也称为重言式.

定义 6^[8] 设 $A = A(p_1, \dots, p_n)$ 是 $F(S)$ 中含有 n 个原子公式 $p_1, \dots, p_n$ 的公式. 在 A 中把 p_i 换为 x_i 并保持 $\neg, \vee$ 与 $\rightarrow$ 不变但把它们理解为 R 单位区间上相应的运算, 则得一 n 元函数:

$$\bar{A}(x_1, \dots, x_n): I^n \rightarrow I,$$

称 $\bar{A}$ 是由公式 A 所诱导的函数.

定义 7 设 $A = A(p_1, \dots, p_n) \in F(S)$, 若 $\bar{A}(x_1, \dots, x_n)$ 在 I^n 上几乎处处等于 1, 则称 A 为几乎重言式.

3 系统 SMTL 中公式的 R 真度

定义 8^[15] 设 $f: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$, 则 f 的 k 次扩张 $f^{(k)}$ 定义为: $\forall (x_1, \dots, x_{n+k}) \in [0, 1]^{n+k}$,

$$f^{(k)}(x_1, \dots, x_n, \dots, x_{n+k}) = f(x_1, \dots, x_n).$$

这里 $k = 0, 1, 2, \dots$. 当 $k = 0$ 时 $f^{(0)} = f$.

定理 1^[15] (积分不变性定理) 任一 n 元函数 $f: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ 和它的 k 次扩张 $f^{(k)}$ 在各自定义域上的积分相等, 即

$$\int_{\Delta_n} f dw_n = \int_{\Delta_{n+k}} f^{(k)} dw_{n+k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

这里分别把 $[0, 1]^n$ 和 $dx_1 \cdots dx_{n+k}$ 简记为 Δ_n 和 dw_{n+k} .

定义 9 设 $A = A(p_1, \dots, p_n) \in F(S)$, 令

$$\tau_R(A) = \int_{\Delta} \bar{A}(x_1, x_2, \dots, x_n) dw,$$

称 $\tau_R(A)$ 为 A 的 R -真度. 这里分别把 $[0, 1]^n$ 和 $dx_1 \cdots dx_n$ 简记为 Δ 和 dw .

设 $A, B \in F(S)$, $\bar{A}, \bar{B}$ 分别是公式 A, B 所诱导函数, 容易验证:

$$\neg \bar{A} = \neg \bar{A}, \overline{A \vee B} = \bar{A} \vee \bar{B}, \overline{A \rightarrow B} = \bar{A} \rightarrow \bar{B}.$$

下面给出 SMTL 系统中公式真度的一些性质.

定理 2 在 SMTL 系统中, 设 $A, B \in F(S)$, 则

$$\tau_R(A \vee B) = \tau_R(A) + \tau_R(B) - \tau_R(A \wedge B).$$

证明 设 A, B 由相同的 m 个原子命题构成 (如果 A, B 所含原子命题不同, 可通过给它们分别合取一些形如 $\neg p_i \vee p_i$ 的重言式, 使得它们含有相同的原子命题, 由积分扩张定理知这并不改变它们的真度值), 再由

$$\overline{A \vee B} + \overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B} + \bar{A} \wedge \bar{B} = \bar{A} + \bar{B}$$

成立, 利用定义 9 可得上述结论.

命题 3 在 SMTL 逻辑系统中, 设 $A \in F(S)$. 若蕴涵算子满足 $x \rightarrow 0 = 1 - x$, 则 $\tau_R(A) + \tau_R(\neg A) = 1$.

证明 由 $x \rightarrow 0 = 1 - x$, 得

$$\neg \bar{A} = \neg \bar{A} = \bar{A} \rightarrow 0 = 1 - \bar{A},$$

再由 R -真度的定义知:

$$\begin{aligned}\tau_R(A) + \tau_R(\neg A) &= \int_{\Delta} \bar{A} dw + \int_{\Delta} \neg \bar{A} dw \\ &= \int_{\Delta} \bar{A} + \neg \bar{A} dw = 1.\end{aligned}$$

下面的命题是显然的:

命题 4 设 $A \in F(S)$, 则 $\tau_R(A) = 1$ 当且仅当 A 是 R -几乎重言式.

4 积分推理规则

定理 3 设 $A, B, C \in F(S)$, $\alpha, \beta \in [0, 1]$.

(1) 若 $\tau_R(A) \geq \alpha$, $\tau_R(A \rightarrow B) \geq \beta$, 则

$$\tau_R(B) \geq \alpha + \beta - 1.$$

(2) 若 $\tau_R(A \rightarrow B) \geq \alpha$, $\tau_R(B \rightarrow C) \geq \beta$, 则

$$\tau_R(A \rightarrow C) \geq \alpha + \beta - 1.$$

(3) 若 $A \rightarrow B$ 是重言式, 则 $\tau_R(A) \leq \tau_R(B)$.

证明 (1) 不妨设公式 A, B, C 都含有相同的 n 个原子公式 $p_1, \dots, p_n$, 因为 R 是强正则蕴涵算子, 从而由 $\bar{A} \rightarrow \bar{B} \leq \bar{A} \rightarrow \bar{B} = (1 - \bar{A} + \bar{B}) \wedge 1 \leq 1 - \bar{A} + \bar{B}$ 知 $\bar{B} \geq \bar{A} + (\bar{A} \rightarrow \bar{B}) - 1$, 故

$$\begin{aligned}\tau_R(B) &= \int_{\Delta} \bar{B} dw \geq \int_{\Delta} \bar{A} dw + \int_{\Delta} \bar{A} \rightarrow \bar{B} dw - 1 \\ &= \int_{\Delta} \bar{A} dw + \int_{\Delta} \overline{A \rightarrow B} dw - 1 \\ &= \tau_R(A) + \tau_R(A \rightarrow B) - 1 \geq \alpha + \beta - 1.\end{aligned}$$

(2) 因为在 MTL 中, 公式

$$(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

是重言式, 从而

$$\tau_R((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))) = 1.$$

又 $\tau_R(B \rightarrow C) \geq \beta$, 由 (1) 的结论得

$$\tau_R((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \geq 1 + \beta - 1 = \beta.$$

再利用一次 (1) 的结论和 $\tau_R(A \rightarrow B) \geq \alpha$, 得 $\tau_R(A \rightarrow C) \geq \alpha + \beta - 1$.

(3) 由 $A \rightarrow B$ 是重言式得 $\tau_R(A \rightarrow B) = 1$, 再由 (1) 得

$$\tau_R(B) \geq \tau_R(A) + \tau_R(A \rightarrow B) - 1 = \tau_R(A).$$

推论 1 设 $A, B, C \in F(S)$.

(1) 如果 $\tau_R(A) = \tau_R(A \rightarrow B) = 1$, 则 $\tau_B(B) = 1$.

(2) 如果 $\tau_R(A \rightarrow B) = \tau_R(B \rightarrow C) = 1$, 则 $\tau_R(A \rightarrow C) = 1$.

5 积分相似度和伪度量

定义 10^[5] 设 $A, B \in F(S)$, 则称

$$\xi_R(A, B) = \int_{\Delta} R(\bar{A}, \bar{B}) \wedge R(\bar{B}, \bar{A}) dw$$

为 A 与 B 之间的 R 积分相似度. 当 $\xi_R(A, B) = 1$ 时称 A

与 B 是 R 积分相似的, 记 $A \sim_R B$.

定义 11 设 $A = A(p_1, \dots, p_n)$, $B = B(p_1, \dots, p_n)$ 若 $\bar{A}(x_1, \dots, x_n) = \bar{B}(x_1, \dots, x_n)$ 在 I^n 中几乎处处成立, 则称 A 与 B 几乎逻辑等价, 记作 $A \approx_R B$.

下面的命题是显然的:

命题 5 设 $A, B \in F(S)$, 则:

(1) $\xi_R(A, A) = 1$.

(2) $\xi_R(A, B) = \xi_R(B, A)$.

(3) $\xi_R(A, B) = \tau_R(B \rightarrow A)$, 这里 $\bar{A} \leq \bar{B}$. 特别地, 如果 B 是 R 重言式, 则 $\xi_R(A, B) = \tau_R(A)$.

(4) $\xi_R(A, B) \leq \tau_R(A \rightarrow B) \wedge \tau_R(B \rightarrow A)$.

(5) $A \approx_R B$ 当且仅当 $A \sim_R B$.

定理 4 设 $A, B, C \in F(S)$, 则

$$\xi_R(A, C) \geq \xi_R(A, B) + \xi_R(B, C) - 1.$$

证明 $\forall a, b, c \in [0, 1]$, 由 $\rightarrow$ 是强正则蕴涵算子知 $a \rightarrow c \geq (a \rightarrow b) + (b \rightarrow c) - 1$, 又因为

$$a \rightarrow b \geq (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a),$$

$$b \rightarrow c \geq (b \rightarrow c) \wedge (c \rightarrow b),$$

所以

$$(a \rightarrow c) \geq (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a) + (b \rightarrow c) \wedge (c \rightarrow b) - 1$$

同理可以证明

$$c \rightarrow a \geq (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a) + (b \rightarrow c) \wedge (c \rightarrow b) - 1$$

从而就有

$$\begin{aligned}(a \rightarrow c) \wedge (c \rightarrow a) &\geq (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a) \\ &\quad + (b \rightarrow c) \wedge (c \rightarrow b) - 1,\end{aligned}\quad (1)$$

不妨设公式 A, B, C 含有相同的 n 个原子命题 $p_1, \dots, p_n$, 则由式 (1) 可知:

$$(\bar{A} \rightarrow \bar{C}) \wedge (\bar{C} \rightarrow \bar{A}) \geq (\bar{A} \rightarrow \bar{B}) \wedge (\bar{B} \rightarrow \bar{A}) + (\bar{B} \rightarrow \bar{C}) \wedge (\bar{C} \rightarrow \bar{B}) - 1 \quad (2)$$

从而由积分真度的定义和式 (2) 知

$$\begin{aligned}\xi_R(A, C) &= \int_{\Delta} (\bar{A} \rightarrow \bar{C}) \wedge (\bar{C} \rightarrow \bar{A}) dw \\ &\geq \int_{\Delta} [(\bar{A} \rightarrow \bar{B}) \wedge (\bar{B} \rightarrow \bar{A}) + (\bar{B} \rightarrow \bar{C}) \wedge (\bar{C} \rightarrow \bar{B}) - 1] dw \\ &= \int_{\Delta} (\bar{A} \rightarrow \bar{B}) \wedge (\bar{B} \rightarrow \bar{A}) dw \\ &\quad + \int_{\Delta} (\bar{B} \rightarrow \bar{C}) \wedge (\bar{C} \rightarrow \bar{B}) dw - 1 \\ &= \xi_R(A, B) + \xi_R(B, C) - 1.\end{aligned}$$

推论 2 设 $A, B, C \in F(S)$, $A \sim_R B$, $B \sim_R C$, 则 $A \sim_R C$.

定义 12 设 $\xi_R: F(S) \times F(S) \rightarrow [0, 1]$ 是 R 相似函数, 定义 $\rho: F(S) \times F(S) \rightarrow [0, 1]$ 如下:

$$\rho_R(A, B) = 1 - \xi_R(A, B), \quad A, B \in F(S).$$

定理 5 $\rho: F(S) \times F(S) \rightarrow [0, 1]$ 是 $F(S)$ 上的伪度量.

定理 6 在系统 SMTL 中, $\neg, \vee$ 与 $\rightarrow$ 是伪度量空间

$(F(S), \rho_R)$ 中的连续运算.

6 逻辑度量空间 $(F(S), \rho_R)$ 中的近似推理

设 $\Gamma \subseteq F(S)$, 以 $D(\Gamma)$ 记全体 Γ -结论之集. 用 A^n 表示 $\underbrace{A \otimes \cdots \otimes A}_{n \uparrow A}$, 以 $\bigotimes_{i=1}^m A_i^n$ 表示 $A_1^n \otimes \cdots \otimes A_m^n$.

定义 13^[8] 设 $\Gamma \subseteq F(S)$, $A \in F(S)$. 定义 A 到 $D(\Gamma)$ 的伪距离如下:

$$\rho_R(A, D(\Gamma)) = \inf\{\rho_R(A, B) \mid B \in D(\Gamma)\}.$$

定理 7 设 $A \in F(S)$, $\Gamma = \{A_1, A_2, \cdots\} \subseteq F(S)$, 则

$$\rho_R(A, D(\Gamma)) = \inf\{\rho_R(A, A \vee (\bigotimes_{i=1}^k A_i^n)) \mid k \in Z^+\}.$$

证明 根据伪距离 ρ_R 的定义,

$$\begin{aligned} \rho_R(A, A \vee (\bigotimes_{i=1}^k A_i^n)) &= 1 - \tau_R(\bigotimes_{i=1}^k A_i^n \rightarrow A). \text{ 对任意的 } B \in \\ D(\Gamma), \text{ 由广义演绎定理知 } \bigotimes_{i=1}^k A_i^n \rightarrow B &\text{ 是重言式, 所以 } \tau_R \\ (B \rightarrow A) &\leq \tau_R(\bigotimes_{i=1}^k A_i^n \rightarrow A). \text{ 又} \\ \rho_R(B, A) &= 1 - \tau_R((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)) \\ &\geq 1 - \tau_R(B \rightarrow A), \end{aligned}$$

因此 $\rho_R(A, B) \geq \rho_R(A, A \vee (\bigotimes_{i=1}^k A_i^n))$. 由 B 是 $D(\Gamma)$ 中的任意公式可得

$$\rho_R(A, D(\Gamma)) \geq \inf\{\rho_R(A, A \vee (\bigotimes_{i=1}^k A_i^n)) \mid k \in Z^+\}.$$

因为 $\bigotimes_{i=1}^k A_i^n \in D(\Gamma)$, 且 $\bigotimes_{i=1}^k A_i^n \rightarrow A \vee (\bigotimes_{i=1}^k A_i^n)$ 是重言式, 所以 $A \vee (\bigotimes_{i=1}^k A_i^n) \in D(\Gamma)$. 故

$$\rho_R(A, A \vee (\bigotimes_{i=1}^k A_i^n)) \geq \rho_R(A, D(\Gamma)),$$

从而有

$$\rho_R(A, D(\Gamma)) \leq \inf\{\rho_R(A, A \vee (\bigotimes_{i=1}^k A_i^n)) \mid k \in Z^+\}.$$

由上面的讨论可得

$$\rho_R(A, D(\Gamma)) = \inf\{\rho_R(A, A \vee (\bigotimes_{i=1}^k A_i^n)) \mid k \in Z^+\}.$$

当 Γ 有限时, 容易证明下面的结论:

推论 3 设 $\Gamma = \{A_1, \cdots, A_k\} \subseteq F(S)$, $A \in F(S)$, 则

$$\rho_R(A, D(\Gamma)) = \rho_R(A, A \vee (\bigotimes_{i=1}^k A_i^n)).$$

推论 4 设 $A \in F(S)$, $\Gamma = \{A_1, A_2, \cdots\} \subseteq F(S)$, 则

$$\rho_R(A, D(\Gamma)) = \inf\{1 - \tau_R((\bigotimes_{i=1}^k A_i^n) \rightarrow A) \mid k \in Z^+\}$$

下面我们将把文献[17]中为 n 值 SMTL 系统建立的近似推理机制推广到本文所建立的 SMTL 逻辑系统中, 从而在 SMTL 逻辑系统中搭建起近似推理的统一框架, 所得定理的证明同文献[17]中相关定理的证明类似, 故略去.

定义 14 设 $\Gamma \subseteq F(S)$, $A \in F(S)$, $\epsilon > 0$, 若 $\rho_R(A,$

$D(\Gamma)) < \epsilon$, 则称 A 为 Γ 的 I -型误差小于 ϵ 的结论, 简记为 $A \in D_\epsilon^I(\Gamma)$.

定义 15 设 $\Gamma \subseteq F(S)$, $A \in F(S)$, $\epsilon > 0$, 若 $1 - \sup\{\tau_R(B \rightarrow A) \mid B \in D(\Gamma)\} < \epsilon$, 则称 A 为 Γ 的 II -型误差小于 ϵ 的结论, 简记为 $A \in D_\epsilon^2(\Gamma)$.

定义 16 设 $\Gamma \subseteq F(S)$, $A \in F(S)$, $\epsilon > 0$, 若 $\inf\{H(D(\Gamma), D(\Sigma)) \mid \Sigma \subseteq F(S), \Sigma \vdash A\} < \epsilon$, 则称 A 为 Γ 的 III -型误差小于 ϵ 的结论, 简记为 $A \in D_\epsilon^3(\Gamma)$, 这里 H 表示 Hausdorff 距离.

定理 8 设 $A \in F(S)$, $\Gamma = \{A_1, A_2, \cdots\} \subseteq F(S)$, 则

$$1 - \sup\{\tau_R(B \rightarrow A) \mid B \in D(\Gamma)\}$$

$$= \inf\{1 - \tau_R((\bigotimes_{i=1}^k A_i^n) \rightarrow A) \mid k \in Z^+\}.$$

定理 9 设 $A \in F(S)$, $\Gamma = \{A_1, A_2, \cdots\} \subseteq F(S)$, 则 $A \in D_\epsilon^I(\Gamma)$ 当且仅当 $A \in D_\epsilon^2(\Gamma)$.

定理 10 设 $A \in F(S)$, $\Gamma = \{A_1, A_2, \cdots\} \subseteq F(S)$, 若 $A \in D_\epsilon^3(\Gamma)$, 则 $A \in D_\epsilon^I(\Gamma)$.

参考文献

- [1] J B Rosser, A R Turquette. Many-Valued Logic[M]. Amsterdam: North-Holland, 1952.
- [2] Pavelka J. On fuzzy Logic I, II, III[J]. Zeitschr Math Logic and Grundlagen d math, 1979, 25(1): 45-52; 119-134; 447-464.
- [3] De Gas M. Knowledge Representation in a Fuzzy Setting[M]. Paris: Tech Rep89/48 University Paris Vilaforia, 1989.
- [4] Wang G J, Fu li, Song J S. Theory of truth degrees of propositions in two-valued logic[J]. Science in China (Series A), 2002, 45(9): 1106-1116.
- [5] Li B J, Wang G J. Theory of truth degrees of formulas in Łukasiewicz n -valued propositional logic and a limit theorem[J]. Science in China(Ser F), 2005, 48(6): 727-7.
- [6] Wang G J, Hui X J. Randomization of classical inference patterns and its application[J]. Science in China, ser. F, 2007, 50(6): 867-877.
- [7] F Esteva*, L Godo. Monoidal t -norm based logic[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 124: 273-288.
- [8] 王国俊. 数理逻辑引论与归结原理(第二版)[M]. 北京: 科学出版社, 2006.
- [9] 王国俊. 非经典数理逻辑与近似推理(第二版)[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
- [10] Zhou H J, Wang G J. Generalized consistency degree of theories w. r. t. formulas in several standard complete logic systems[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2006, 157: 2058-2073.
- [11] 王国俊, 宋建设. 命题逻辑中的程度化方法[J]. 电子学报, 2006, 34(2): 252-257.

Wang G J, Song J S. Graded method in propositional logic [J]. Acta Electronica Sinica, 2006, 34(2): 252-257. (in Chi-

nese)

- [12] Wang G J, She Y H. Topological description of divergency and consistency of two-valued propositional theories[J]. Acta Mathematica Sinica, Chinese Series, 2007, 50(4): 841 – 850.
- [13] 李骏, 王国俊. 基于支持度理论的广义 MP 问题的形式化解[J]. 电子学报, 2008, 36(11): 2190 – 2194.
Li J, Wang G J. Formalized solutions for problems of generalized mudus ponens under theory of sustentation degree[J]. Acta Electronica Sinica, 2008, 36(11): 2190 – 2194. (in Chinese)
- [14] Zhou H J. Borel probabilistic and quantitative logic [J]. Science China Information Science, 2010, 53: 1 – 12.
- [15] Wang G J, Leung Y. Integrated semantics and logic metric spaces[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2003, 136: 71 – 91.
- [16] Wang G J. A unified integrated method for evaluating goodness of propositions of several propositional logic systems and its application [J]. Chinese Journal of Electronics, 2012, 21(2): 195 – 201.
- [17] 李骏, 邓富喜. n 值 S-MTL 命题逻辑系统中公式真度的统一理论[J]. 电子学报, 2011, 39(8): 1864 – 1868.
Li J, Deng F X. Unified theory of truth degrees in n -valued S-MTL propositional logic[J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(8): 1864 – 1868. (in Chinese)

- [18] 任芳, 王国俊. 正则蕴涵算子分析性质的研究[J]. 陕西师范大学学报(自然科学版), 2005, 33(3): 6 – 9.

Ren F, Wang G J. Study on analytic property of regular implication operators [J]. Journal of Shaanxi Normal University, 2005, 33(3): 6 – 9.

作者简介



李 骏 男, 1972 年生于甘肃白银, 兰州理工大学理学院副教授, 博士, 硕士生导师. 主要研究方向为不确定性推理、非经典数理逻辑.

E-mail: lj99120@yahoo.com.cn



姚锦涛 男, 1987 生于甘肃庆阳, 兰州理工大学理学院硕士研究生. 主要研究方向为不确定性推理.